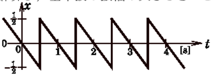
←個人識別番号6 桁．1 文字目と2 文字目は違う 数字

全部で 1 ページ．ノート，プリント，スマートフォン等の持ち込み不可．写真付学生証を 提示すること．不正行為で今学期の全試験が無効になる．

信号処理　2019 年度 期末試験 (担当：高橋弘太)	学年	類/学科	プログラム	学籍番号 （7 桁）								氏名	

問題 1　フーリエ級数展開（配点：9）

下図に示す鋸波形状の周期信号 $x(t)$ の第 n 次高調波の振幅の大きさを計算し，基本波の振幅の大きさを1 とした相対値で答えよ．



この波形のフーリエ級数展開の計算はレポート1 で出題した問題と符号を除けば本質的同じである．すでに模範解答も配布しているので，計算は省く．$c_n = \frac{j}{2\pi n}(-1)^n$ であるので，$\frac{|c_n|}{|c_1|} = \frac{1}{n}$

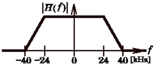
問題 2　周期信号のフーリエ変換（配点：9）

上の問題 1 で定義した周期信号 $x(t)$ のフーリエ変換 $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$ を求めよ．

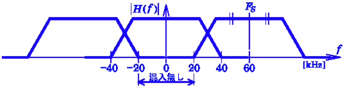
プリント 5ページの「**3.2** 周期信号のフーリエ変換に書いてある手法を使う．式 (26) によれば，$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, \delta(\omega - n\omega_0)$ であるので，ここに問題1 で求めた c_n を代入することで，$X(\omega) = j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \delta(\omega - 2\pi n)$

問題 3　サンプリング定理（配点：10）

帯域制限されていない連続時間信号 $x(t)$ を離散時間信号 x_n に変換する．アンチエイリアスフィルタとして，下図の振幅特性 $|H(f)|$ を持つフィルタを使うとき，x_n 中の 0〜20 kHz の成分にエイリアシング雑音を混入させないためのサンプリング周波数 F_s に対する条件を図示を含む理由とともに述べよ．



周波数 F_s でサンプリングされることは，周波数領域で見たときには，F_s 間隔の δ 関数列を畳み込むこととみなせるから，図のようにスペクトルが重なる．0〜20 kHz に別の周波数成分に由来する成分の混入が無いようにするためには，$Fs \geq 60$ Hz にとれば良い．



問題 4　不規則信号論（配点：9）

不規則信号論において，確率法則を記述するのに密度関数 $p(x)$ では不十分であり，有限次元の密度関数 $p(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n)$ を用いる必要がある理由を説明せよ．説明文中で，「三角波」と「ガウス性不規則信号」の 2 つの語句を必ず用いよ．

例えば振幅1 の三角波の場合，その周波数にかかわらず，信号値を確率変数にとった密度関数 $p(x)$ は -1 から $+1$ の範囲の一様分布となる．すなわち，密度関数では周波数の区別すらできない．自然界の雑音や騒音など，多くの不規則信号はガウス性不規則信号としてモデル化できるが，どのようなガウス性不規則信号であっても，密度関数 $p(x)$ はガウス分布となってしまうので，平均と分散の区別しかできず，スペクトルの差異すら区別することができない．以上の具体的事実より密度関数では不十分であり，異なる時間での信号間の関係をあらわすことのできる有限次元の密度関数を用いる必要があることがわかる．有限次元の密度関数を用いることでスペクトルの差異も区別することができる

問題 5　畳み込み（配点：18）

畳み込み演算とはどのような演算であるかを式で示せ．さらに，周波数領域では畳み込み演算が乗算になることを証明せよ．

信号 $y(t)$ が信号 $x(t)$ とインパルス応答 $h(t)$ の畳み込みであるとは，$y(t) = \int h(\tau)x(t-\tau)d\tau$ ということ．

[コメント] $y(t) = \int h(t)x(t+\tau)dt$ としてしまった誤解答が非常に多かった．自己相関関数と混同してしまったものと思われる．要注意．

$x(t), y(t)$,$h(t)$ のフーリエ変換をそれぞれ $H(\omega), Y(\omega)$,$H(\omega)$ としたとき，以下のように計算できるので畳み込み演算は周波数領域では乗算になる．

$$
\begin{aligned}
Y(\omega) &= \int (h(t) * x(t)) e^{-j\omega t} dt && (1)\\
&= \int \left[\int h(\tau)x(t-\tau)d\tau \right] e^{-j\omega t} dt && (2)\\
&= \int h(\tau) \left[\int x(t-\tau)e^{-j\omega t} dt \right] d\tau && (3)\\
&= \int h(\tau) \left[\int x(t-\tau)e^{-j\omega(t-\tau)} dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau && (4)\\
&= \left[\int h(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \right] \left[\int x(t)e^{-j\omega t} dt \right] && (5)\\
&= H(\omega)X(\omega) && (6)
\end{aligned}
$$

問題 6　z 変換，逆 z 変換（配点：18）

(1) $x_n = \begin{cases} 0.7^n & (n \geq 0) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$ の z 変換 $X(z)$ を求め，収束領域も書け．

$X(z) = \frac{1}{1 - 0.7z^{-1}}$，　収束領域は $0.7 < |z|$

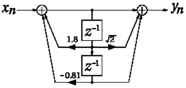
(2) y_n は上の x_n とは一致しない信号であるが，その z 変換 $Y(z)$ に関して $Y(z) = X(z)$ であると言う．y_n を求めよ．

$X(z) = \frac{1}{1 - 0.7z^{-1}}$，　収束領域は $0.7 > |z|$, を逆フーリエ変換して，

$x_n = \begin{cases} -0.7^n & n < 0 \\ 0 & n \geq 0 \end{cases}$

問題 7　ディジタルフィルタ（配点：27）

下図であらわされるディジタルフィルタ DF を，サンプリング周波数 $F_s = 48$ kHz で動作させる．以下の問に答えよ．



(1) DF の伝達関数 $H(z)$ を書け．

$$H(z) = \frac{1 + \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1.8z^{-1} + 0.81z^{-2}}$$

(2) おおよその周波数特性（振幅特性）を描け（横軸に「kHz」をとって $|H(f)|$ の概形を描け）．

極が $z = 0.9$ に 2 つ，零点が $z = \frac{-\sqrt{2} \pm j\sqrt{2}}{2}$ にあるから，