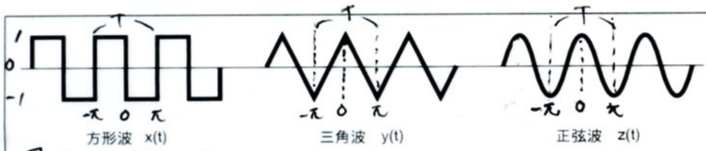
信号処理論レポート１（高橋弘太）注意：**清書せよ**　締切り：2017 年 4 月 22(K)25(I)　講義開始前に教卓に提出	
学籍番号	氏名

問題１（複素フーリエ級数展開してから解答しましょう）

基本周波数が等しく，最大値と最小値もそれぞれ等しい等しい方形波 $x(t)$，三角波 $y(t)$，正弦波 $z(t)$ がある．基本波成分の振幅の比率を示せ．



最大値1, 最小値−1, 周期 $T=2\pi$, 角周波数 $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ と定義する。

このとき，
$x(t)=\begin{cases}1 & (-\pi\le t<0)\\ -1 & (0\le t<\pi)\end{cases}$，$y(t)=\begin{cases}1+\frac{2}{\pi}t & (-\pi\le t<0)\\ 1-\frac{2}{\pi}t & (0\le t<\pi)\end{cases}$，$z(t)=\cos t \quad (-\pi\le t<\pi)$

と表せる。$x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ をそれぞれ複素フーリエ級数展開する。

(i) 方形波 $x(t)$ の場合

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}1\cdot e^{-jnt}dt+\int_{0}^{\pi}(-1)\cdot e^{-jnt}dt\right\}$$
$$=\frac{1}{j\pi n}\left(\frac{e^{j\pi n}+e^{-j\pi n}}{2}-1\right)=\frac{1}{j\pi n}\left\{(-1)^n-1\right\}$$

よって，基本波成分の振幅 $|C_1|$ は

$$|C_1|=|C_{-1}|=\left|\frac{-2}{j\pi}\right|=\frac{2}{\pi}\cdots①$$

(ii) 三角波 $y(t)$ の場合

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}\left(1+\frac{2}{\pi}t\right)e^{-jnt}dt+\int_{0}^{\pi}\left(1-\frac{2}{\pi}t\right)e^{-jnt}dt\right\}$$
$$=\frac{1}{2n^2\pi^2}\left\{4-2(e^{jn\pi}+e^{-jn\pi})+jn\pi(e^{jn\pi}-e^{-jn\pi})\right\}$$
$$=\frac{2}{n^2\pi^2}\left\{1-(-1)^n\right\}$$

訂正

よって基本波成分の振幅 $|C_1|$ は

$$|C_1|=|C_{-1}|=\frac{4}{\pi^2}\cdots②$$

(iii) 正弦波 $z(t)$ の場合

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\cdot e^{-jnt}dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2}e^{-jnt}dt$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{j(1-n)t}+e^{-j(1+n)t}dt\cdots③$$

・$n\neq\pm1$ のとき③式は

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{1-n}\cdot\frac{e^{j(1-n)\pi}-e^{-j(1-n)\pi}}{2j}+\frac{1}{1+n}\cdot\frac{e^{j(1+n)\pi}-e^{-j(1+n)\pi}}{2j}\right\}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{1-n}\sin(1-n)\pi+\frac{1}{1+n}\sin(1+n)\pi\right\}=0$$

・$n=1$ のとき③式は

$$C_1=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1+e^{-2jt}dt=\frac{1}{2}$$

よって，基本波成分の振幅 $|C_1|$ は

$$|C_1|=|C_{-1}|=\frac{1}{2}\cdots④$$

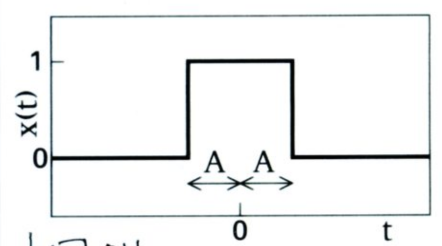
①, ②, ④より，求める振幅の比率は，

$$\frac{2}{\pi}:\frac{4}{\pi^2}:\frac{1}{2}=\frac{4}{\pi}:\frac{8}{\pi^2}:1$$
$$\simeq 1.27:0.81:1$$

$x(t)$ での振幅：$y(t)$ での振幅：$z(t)$ での振幅 $=\frac{4}{\pi}:\frac{8}{\pi^2}:1$

問題２（フーリエ変換の計算も練習しましょう）

下の $x(t)$ のフーリエ変換 $\left(X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-j\omega t}dt\right)$ に対し，$X(0)=1$ となる A を求め，$X(\omega)$ のグラフを描け．



上図より，

$x(t)=\begin{cases}1 & (|t|\le A)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$ とおける。

フーリエ変換 $X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$ より。

$$X(\omega)=\int_{-A}^{A}1\cdot e^{-j\omega t}dt$$
$$=\frac{1}{-j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_{-A}^{A}$$
$$=\frac{1}{j\omega}\left(e^{j\omega A}-e^{-j\omega A}\right)$$

（ここで，オイラーの公式 $\sin\theta=\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$ より。
$\frac{1}{j}(e^{j\theta}-e^{-j\theta})=2\sin\theta$
$\theta=\omega A$ とし。）

$$X(\omega)=\frac{2\sin\omega A}{\omega}$$
$$=2A\frac{\sin\omega A}{\omega A}$$
$$=2A\,\mathrm{sinc}(\omega A)\cdots①$$

$\mathrm{sinc}\,\theta=\frac{\sin\theta}{\theta}$

問題文中より

$$X(0)=1\cdots②$$

式①，②より

$$A=\frac{1}{2}$$

式①へ代入し，

$$X(\omega)=\mathrm{sinc}\frac{\omega}{2}$$