						←個人識別番号6桁．1文字目と2文字目は違う数字

この用紙が採点される．プリント・ノート・電卓・電話等の持込み禁止．写真付学生証を提示すること．不正行為で今学期の全試験が無効になる．

信号処理　2018年度 期末試験 (担当：高橋弘太)	学年	類/学科	プログラム	学籍番号（7桁）								氏名	

問題 1　サンプリング定理（配点：9）

サンプリング定理とは何か，エイリアシングとは何か，それぞれ説明せよ．

サンプリング定理とは，帯域幅 B [Hz] の帯域制限信号 $x(t)$ が，サンプリング周波数 $F_s = 2B$ のサンプリングで得られた値から完全に決定されることを示した定理．例えば，$F_s = 48$ kHz であれば，24 kHz 未満の周波数成分を記録再生することができる（6点）．エイリアシングとは，サンプリング周波数の 1/2 以上の周波数成分をサンプリングしたときに，異なる周波数成分として記録されてしまうことを言う，たとえば，上の場合，30 kHz の正弦波は 18 kHz の正弦波として記録されてしまう（3点）．

問題 2　ディジタルフィルタ（配点：9）

ディジタルフィルタにおける,「極と零点」とは何であるかを説明せよ．また，z 平面上における「極と零点」の位置を全て知ることによって判明するディジタルフィルタの特性を3つあげよ．さらに,「極と零点」の位置からは判明しないディジタルフィルタの特性を1つあげよ．

伝達関数 $H(z)$ の大きさ $|H(z)|$ を無限大とする z を極と言う．伝達関数 $H(z)$ を 0 とする z を極と言う（3点）．極と零点の位置を知ることによって，(1) 安定であるか否か，(2) 最小位相であるか否か，(3) 直線位相であるか否か，が判明する（3点）．反面，極と零点の位置からはフィルタの絶対的なゲインを知ることはできない（3点）．(例えば，ある第一のフィルタの出力にゲインを2倍にする素子をつけて作られた第二のフィルタがあったとすると，2つのフィルタの極と零点の位置は同一だがゲインは2倍異なる）

問題 3　窓関数（配点：9）

信号処理技術における窓関数とは何かを答えよ．また，ハン窓，ハミング窓など，様々な窓関数の形が提案されているが，適切な窓関数をどのようにして選ぶかについても答えよ．

信号処理技術においては，やむなく時間制限信号しか用いることができない場合が多い．例えば，有限時間での観測データや，FIR フィルタのインパルス応答である．本来，無限の長さを持つデータを必要な長さに切り詰めてしまうと．その長さの部分だけが1でその外側で0である関数を乗算することになる．これを周波数領域で見れば，sinc 型の関数との畳み込みとなり，解析結果が滲んでしまう．sinc 関数は裾野が広く，また凹凸が大きいので，畳み込まれてしまう関数としては害が大きい．そこで，周波数領域で sinc 関数よりは良好な形になるような時間制限信号として定義されたのが窓関数である．(ここまで6点）様々な窓関数は，畳み込まれる関数形によって使い分ける．例えば，han 窓は離れた周波数への滲みが少ないので，主要なエネルギーから離れた小さなエネルギーの成分を見極めるのに適している．一方，近い周波数への滲みは hamming 窓のほうが小さいので，近接した2つの成分を見極めるには，hamming 窓のほうが適している（3点）．

問題 4　不規則信号論（配点：9）

不規則信号 $f(t) = \cos(a\,t)$ は定常であるか否かを理由をつけて答えよ．理由は，定常性の定義に基づくものであること．なお，a は，$0 \leq a \leq \pi$ の範囲で一様に分布する確率変数とする．

定常ではない．これを示すためには，定常の定義に対する反例をひとつあげれば良い．そこで．まず定常の定義を書くと以下のようになる．定常とは，有限次元の密度関数が，任意の τ 秒の時間シフトに対して不変，すなわち，$p(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n) = p(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1{+}\tau, t_2{+}\tau, \ldots, t_n{+}\tau)$ であることを言う（定常の定義が書けていれば3点）．さて，この定義の特別なケースとして，$p(x;0) = p(x;1)$ をあげることができる．$p(x;0)$ は，$f(0)$ の分布をあらわすが，a の値にかかわらず $f(0) = 1$ であるので，$p(x;0) = \delta(x-1)$ である．一方，$p(x;0)$ は，$f(1)$ の分布をあらわすが，a の値によって-1から+1の範囲に連続的に分布する．すなわち，$p(x;0) \neq \delta(x-1)$ である．これより，$f(t)$ は定常ではないと主張できる．

問題 5　周期信号のフーリエ変換（配点：9）

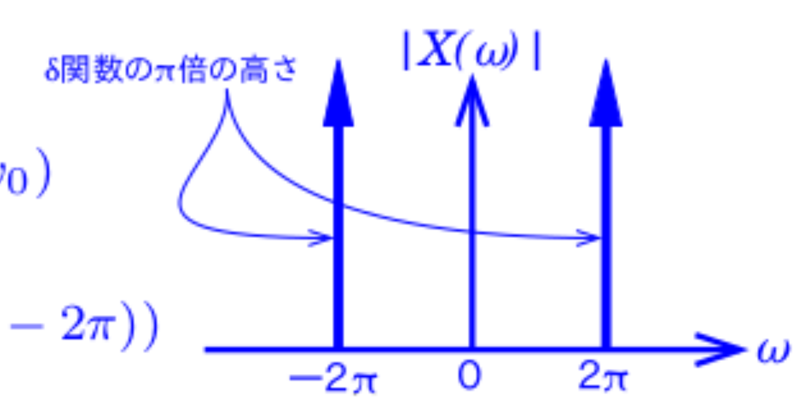
$x(t) = \sin(2\pi t)$ のフーリエ変換 $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$ を式で書き表し，$|X(\omega)|$ のグラフを描け．

周期信号のフーリエ変換なので，まともに計算すると発散してしまう．そこでプリントの5ページの3.2節で説明したように，まずフーリエ級数展開をして，式 (26) によりフーリエ変換に移行する技法を使う．今回は，基本角周波数 $\omega_0 = 1$ であるので，フーリエ級数展開の係数は以下のように求まる．

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{j2\pi t} - e^{-j2\pi t}}{2j} e^{-j2\pi n t} dt \qquad \text{より}$$

$c_{-1} = -\frac{1}{2j}$, $c_1 = \frac{1}{2j}$ で，その他の n に対する c_n は 0．そこで，式 (26) を使って，

$$\begin{aligned} X(\omega) &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= j\pi(\delta(\omega + 2\pi) - \delta(\omega - 2\pi)) \end{aligned}$$



逆フーリエ変換をしたときに $x(t)$ になる $X(\omega)$ を探すという方法でも正解．

問題 6　z 変換（配点：23）

(1) $x_n = \begin{cases} 0.9^n & (n \geq 0) \\ 0 & (n < 0) \end{cases}$ を z 変換し収束領域も書け．

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (0.9\, z^{-1})^n \quad \text{より}$$

収束領域 $|z| > 0.9$ において $X(z) = \dfrac{1}{1 - 0.9\, z^{-1}}$

(2) $x_n = \begin{cases} 0.5^n \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) & (n \geq 0) \\ 0 & (n < 0) \end{cases}$ を z 変換し収束領域も書け．

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (0.5\, \frac{e^{j\frac{\pi}{3}n} - e^{-j\frac{\pi}{3}n}}{2j} z^{-1})^n \quad \text{より}$$

収束領域 $|z| > 0.5$ において $X(z) = \dfrac{0.25\sqrt{3}z^{-1}}{1 - 0.5\, z^{-1} + 0.25\, z^{-2}}$

問題 7　フーリエ変換（配点：14）

$x(t) = \begin{cases} 1 + t & (-1 \leq t < 0) \\ 1 - t & (0 \leq t < 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$ のフーリエ変換 $X(\omega)$ を出来るだけ簡単な式で書き表し，$|X(\omega)|$ のグラフを描け．

4月24日に提出していただいたレポート1の問題2に対する模範解答がそのままこの問題に対する解答になっています．$X(\omega)$ が正しく解答できて9点．グラフが完全に描けて5点．グラフについては，$X(0)$ が発散すると解答した場合は0点．$X(\omega) = 0$ となる ω を 2π でなく π としてしまったり記述されていない場合でも，概形はほぼとらえられている場合は3点．

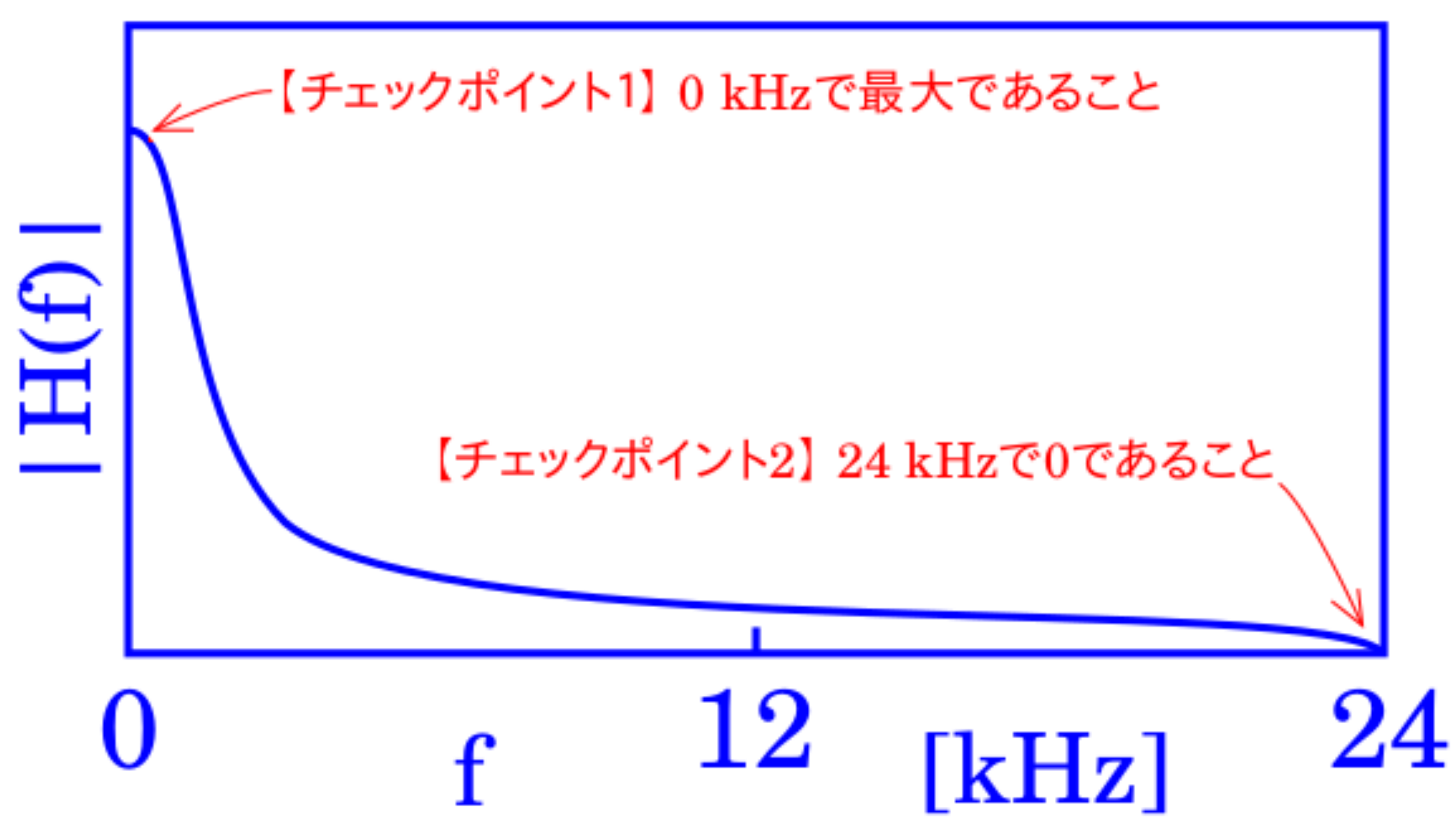
問題 8　ディジタルフィルタ（配点：18）

伝達関数が $H(z) = \dfrac{1 + z^{-1}}{1 - 0.1\, z^{-1} - 0.72\, z^{-2}}$ であるディジタルフィルタをサンプリング周波数 $Fs = 48$ kHz で用いる．

(1) このフィルタの振幅特性の概形を描け（横軸を「kHz」にとって $|H(f)|$ を描け）．

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - 0.9\, z^{-1})(1 + 0.8\, z^{-1})} \quad \text{と書けるから，}$$

0.9 と −0.8 に極があり，−1.0 に零点がある．よって以下のようなグラフとなる．(0.0 にも零点があるが，これは振幅特性には影響しない)



【チェックポイント3】0から24 kHzの範囲のプロットであること

(2) このフィルタのインパルス応答 h_n を式で書き表せ．

$$H(z) = \frac{19}{17}\frac{1}{1 - 0.9z^{-1}} - \frac{2}{17}\frac{1}{1 - (-0.8z^{-1})} \quad \text{と書ける．}$$

単位円上の z に対して，$0.9z^{-1}$ も $-0.8z^{-1}$ も絶対値をとると1未満なので，等比数列の和の公式を使うことができる．すなわち，

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{19}{17}(1 + 0.9z^{-1} + 0.9^2 z^{-2} \cdots) \\ &\quad - \frac{2}{17}(1 + (-0.8)z^{-1} + (-0.8)^2 z^{-2} \cdots) \quad \text{と書けるので} \end{aligned}$$

$$h_n = \begin{cases} \frac{19}{17}\, 0.9^n - \frac{2}{17}(-0.8)^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

部分分数法による逆 z 変換の問題です（プリントの13ページ，式 (82)）